LA FILOSOFÍA ÁRABE - ISLÁMICA DE LAS MATEMÁTICAS

Mohammad Saleh Zarepour

Traducción: Karen Martínez García[1]

1. Traducido de: Zarepour, M. (2022). "Arabic and Islamic Philosophy of Mathematics", en *Stanford Encyclopedia of Philosophy.*

Introducción

La filosofía de las matemáticas puras se ocupa de dos grandes grupos de cuestiones. Uno pertenece a la ontología de las entidades matemáticas y el otro a la epistemología de los conceptos y juicios matemáticos (Avigad 2007). La naturaleza y existencia de objetos matemáticos (por ejemplo, números y formas geométricas), la existencia y calificaciones de infinitos (por ejemplo, magnitudes infinitas y colecciones infinitas de números o cosas numeradas), y la existencia y calificaciones de continuos son algunos de los más significativos. Cuestiones ontológicas que preocupan a los filósofos de las matemáticas. Por otro lado, algunos de los temas epistemológicos más importantes y desafiantes sobre las matemáticas son los siguientes: los mecanismos a través de los cuales captamos el conocimiento matemático, el estado epistémico de los axiomas y principios matemáticos, la naturaleza de las pruebas matemáticas (que se pueden escribir en papel) y su conexión con lo que sucede en la mente de los matemáticos, y el papel del conocimiento matemático para lograr una mejor comprensión del mundo físico.

Es bien sabido que la civilización islámica medieval desempeñó un papel fundamental en el desarrollo histórico de los aspectos técnicos de las matemáticas. Sobre los hombros de sus ancestros preislámicos griegos, indios y persas, los matemáticos musulmanes han hecho numerosas innovaciones en varias ramas de las matemáticas y han escrito una gran cantidad de libros y ensayos que presentan nociones matemáticas y prueban teoremas matemáticos (Al-Daffà 1977 , R. Rashed 1984b [1994], 1996 [2012], 2015, Berggren 2016). Sin embargo, es muy difícil (si no imposible) encontrar un libro de la época islámica medieval que se dedique exclusivamente a un estudio exhaustivo y sistemático de la filosofía de las matemáticas. No obstante, muchas de las cuestiones filosóficas sobre las matemáticas antes mencionadas han sido abordadas, por grandes pensadores medievales musulmanes, en diversas obras cuyo tema central eran las matemáticas, la física, la metafísica o incluso la teología (kalām). Al juntar estos compromisos dispersos, queda claro que, aunque la filosofía de las matemáticas nunca ha sido tratada como una disciplina independiente en el mundo islámico medieval, los pensadores musulmanes propusieron ideas, ideas y argumentos muy interesantes y profundos sobre al menos algunos temas filosóficos relacionados. a las matemáticas Esta entrada revisa brevemente los ejemplos más notables de tales ideas y argumentos, algunos de los cuales han sido objeto de debates y discusiones de larga data entre pensadores musulmanes. En consecuencia, los trabajos matemáticos técnicos de los eruditos árabes y musulmanes se discutirán solo en la medida en que contengan materiales relacionados con la filosofía de las matemáticas.

1. ONTOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

1.1 Lo que no son objetos matemáticos

Las huellas de los puntos de vista filosóficos de Pitágoras y Platón con respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos se pueden encontrar en las obras de los primeros pensadores musulmanes. Esto podría deberse en parte a las primeras traducciones árabes de obras de matemáticos pitagóricos y platónicos. La mayoría de los matemáticos de la tradición de Nicómaco, Proclo y Jámblico eran pitagóricos y platónicos (Endress 2003). Algunas de sus obras más importantes han sido traducidas al árabe y han influido en matemáticos y filósofos musulmanes. Por ejemplo, la Introducción a la aritmética de Nicómaco fue traducida al árabe por Ḥabīb Ibn Bahrīz (m. a principios del siglo IX) del siríaco y por Thābit Ibn Qurra (m. 901) del griego (Brentjes 2022: sec. 1). La inspiración de los enfoques pitagóricos y platónicos de la filosofía de las matemáticas es fácilmente detectable, por ejemplo, en las obras de los Hermanos de la Pureza (Ikhwān al-ṣafāʾ) y los primeros mutazilitas (Los Hermanos de la Pureza [Epístolas]; Endress 2003: 132 –33; Marquet 2006; Fazlıoğlu 2014: 2; El-Bizri 2018; Baffioni 2022). Las principales características del pitagorismo y el platonismo con respecto a la ontología de las matemáticas pueden ser capturadas por las siguientes tesis (Zarepour 2019: 198):

Separación de objetos matemáticos (SM): Los objetos matemáticos son sustancias inmateriales independientes, completamente separadas (mufāriq) de la materia y los objetos materiales.

Principalidad de los Objetos Matemáticos (PM): Los objetos matemáticos son los principios (mabādiʾ) de las cosas naturales. Los objetos matemáticos tienen algún tipo de primacía sobre las formas naturales, lo que hace que estas últimas dependan (o se basen o sean causadas por) las primeras.

Platón estaba comprometido con ambas tesis. Por el contrario, los pitagóricos respaldaron solo la última tesis. Esto es así al menos si confiamos en el informe de Aristóteles (Metafísica 987b23–987b25). Aunque el pitagorismo considera que los números son las causas y los principios de todas las demás cosas existentes, no trata a los números como entidades necesariamente separadas de la materia (Zhmud 1989; De Smet 2022). Desde nuestra perspectiva actual, esto es hasta cierto punto sorprendente porque, en comparación con (PM), (SM) parece gozar de una mayor plausibilidad prima facie. Pero precisamente por la presencia de fuertes tendencias hacia el pitagorismo en el pensamiento islámico primitivo (Brentjes 2022), (PM) fue defendido más explícitamente que (SM). En cualquier caso, la crítica brutal de Avicena a estas dos tesis (junto con su crítica más general a la teoría platónica de las formas universales separadas) hizo que el pitagorismo y el platonismo fueran extremadamente impopulares en la filosofía post-aviceniana. En la Metafísica de “La Curación”, Avicena (m. 937) argumenta contra (SM) y (PM) no solo rechazando los argumentos atribuidos a los defensores de estas dos tesis (Avicena [Met.]: cap. VII.2) sino también desarrollando sus propios argumentos positivos contra ellos (Avicena [Met.]: cap. VII.3).

Según un argumento que Avicena atribuye a

los defensores de (SM), por un lado, los objetos matemáticos están separados en definición (o en mente). Pueden definirse (o concebirse) sin referencia a la materia oa los seres materiales. Por otro lado, todo lo que está separado en definición (o en mente) está separado en existencia. Por lo tanto, concluye el argumento, los objetos matemáticos tienen una existencia separada. Existen como seres completamente separados que no tienen asociación con la materia o los seres materiales (Avicena [Met.]: cap. VII.2, sec. 5). Sin embargo, Avicena encuentra deficiente este argumento. Argumenta que hay una diferencia entre (a) definir (o concebir) algo sin la condición de materialidad y (b) definir (o concebir) algo con la condición de inmaterialidad. Dice que los objetos matemáticos están separados en definición sólo en el sentido de (a). Pero la segunda premisa del argumento en discusión es verdadera sólo si la separación en definición se considera en el sentido de (b). El mero hecho de que algo pueda definirse sin la condición de materialidad no implica que esa cosa pueda existir en el reino extramental completamente separada de la materia. Pero los objetos matemáticos no pueden definirse con la condición de inmaterialidad. No es plausible suponer la inmaterialidad como un componente esencial de las definiciones de los objetos matemáticos, o eso afirma Avicena. Por lo tanto, este argumento es falaz y no puede establecer (SM) (Avicena [Met.], cap. VII.2, secs. 16–17; Marmura 2006: 360–63; Porro 2011: 292–93; Zarepour 2019: sec. 4.1).
Un argumento simple que Avicena atribuye a los defensores de (PM) es el siguiente: los objetos matemáticos están separados. En otras palabras, (SM) es verdadera. Además, los principios (o causas) de las cosas materiales no pueden ser materiales en sí mismos. Deben estar separados. Por lo tanto, los objetos matemáticos son los principios de las cosas materiales (o naturales) (Avicena [Met.]: cap. VII.2, sec. 7). Avicena piensa que este argumento no solo no es sólido debido a la falsedad de (SM) sino que también es inválido. Incluso si aceptamos que los objetos matemáticos están separados y que los principios de las cosas naturales deben estar separados, no podemos concluir válidamente que los objetos matemáticos son los principios de las cosas naturales. Podrían existir otras cosas separadas no matemáticas que forman los principios de los seres naturales. El argumento en cuestión es válido solo si presuponemos que los objetos matemáticos son los únicos existentes separados. Pero esto es algo de lo que no tenemos pruebas. Por lo tanto, este argumento no establece (PM) (Avicena [Met.]: cap. VII.2, sec. 21; Marmura 2006: 365–66; Porro 2011: 294; Zarepour 2019: sec. 4.2).
El propio argumento de Avicena en contra de la separación o inmaterialidad de los objetos matemáticos se puede resumir de la siguiente manera: Hay algunos objetos matemáticos en el mundo sensible. De lo contrario, no podríamos captar sus conceptos (p. ej., los conceptos triángulo, círculo, dos, etc.) (Avicena [Met.]: sec. VII.3, sec. 1). Ahora bien, si también hay algunos objetos matemáticos completamente separados (totalmente separados del mundo sensible), entonces estos dos grupos de objetos matemáticos (sensibles/no separados y no sensibles/separados) deben compartir esencias y definiciones similares (Avicena [Met.]: capítulo VII.3, sección 2). De lo contrario, no hay forma de que podamos conocer objetos materiales separados. Esto se debe a que no parece que tengamos ningún acceso directo a un reino de objetos matemáticos completamente inmateriales (Esto nos recuerda el desafío epistemológico de Benacerraf (1973) al platonismo matemático). Incluso si tales cosas existen, las conocemos sólo por la mediación de conocer sus contrapartes sensibles. No tenemos justificación para la existencia de objetos matemáticos separados que no tienen una contrapartida sensible en el mundo material. Pero esto deja injustificada la afirmación de que los objetos

matemáticos pueden ser esencialmente inmateriales y separados. Avicena considera que este argumento establece que (SM) es inverosímil (Avicena [Met.], cap. VII.3, sec. 3; Zarepour 2019: sec. 5). Más adelante veremos que este argumento revela aspectos interesantes de las explicaciones de Avicena sobre la epistemología y la ontología de las matemáticas.

Finalmente, Avicena argumenta que incluso si existen objetos matemáticos separados, no pueden ser los principios (o causas) de las cosas naturales. Parece intuitivamente plausible que si un objeto matemático separado es el principio de cualquier material existente, debe ser en primer lugar el principio de su propia contraparte sensible. Tenga en cuenta que, según Avicena, la afirmación de que existe un objeto matemático separado, digamos un triángulo, no puede justificarse a menos que hayamos llegado a conocerlo a través del conocimiento de una contraparte sensible que existe en el mundo material. Ahora bien, si ese triángulo separado es la causa de cualquier cosa material, debe ser en primer lugar el principio de su propia contraparte sensible, o eso cree Avicena. Pero si el triángulo sensible es causado por el triángulo separado, entonces podemos preguntar legítimamente por qué el primero necesita del segundo. Es la esencia o (algunos de) los accidentes del triángulo sensible lo que lo hace dependiente de su contraparte separada. Sin embargo, si se debe a la esencia del triángulo sensible, entonces el propio triángulo separado necesita un principio. Esto se debe a que los triángulos separados y sensibles comparten la misma esencia. Así, si es la esencia del triángulo sensible lo que le hace necesitar el triángulo separado, entonces el triángulo separado (que tiene la misma esencia que su contraparte sensible) debe ser causado por otro triángulo separado. Repitiendo la misma línea de argumentación, podemos concluir que debe existir una cadena infinita de triángulos causalmente conectados. Dado que tales regresiones infinitas son inaceptables, lo que hace que un objeto matemático sensible necesite su contraparte separada no es su esencia compartida. Pero también es imposible que (algunos de) los accidentes de un objeto matemático sensible lo hagan depender de su contraparte separada. Los accidentes del objeto sensible no existen a menos que ese objeto mismo exista. Pero también se supone que el objeto sensible mismo no existe a menos que exista el objeto separado. Esto significa que el objeto separado tiene algún tipo de prioridad explicativa sobre los accidentes del objeto sensible. Por lo tanto, los accidentes de un objeto matemático sensible no pueden explicar, de manera no circular, por qué este objeto necesita su contraparte separada (Avicena [Met.]: cap. VII.3, sec 4). Así, parece que no hay una justificación convincente de por qué un objeto matemático separado debe ser la causa de su contraparte sensible, y mucho menos la causa (o principio) de cualquier otra cosa natural. Avicena toma este argumento como una refutación (PM).

Estos argumentos muestran que los objetos matemáticos no son entidades separadas completamente separadas del mundo sensible ni las causas de las cosas naturales. La refutación de Avicena del platonismo y el pitagorismo con respecto a los objetos matemáticos fue tan convincente e influyente que estos enfoques desaparecieron casi por completo en la filosofía postavicena. Esto fue así a pesar de la fuerte presencia de elementos pitagóricos y/o platónicos en otros aspectos (es decir, no matemáticos) de la filosofía de algunos pensadores post-avicenianos, como Suhrawardī (m. 1191) (Walbridge 2000; De Smet 2022). Los detalles de algunas críticas avicenianas de (SM) y (PM), que generalmente se tomaban como partes auxiliares de la crítica general de Avicena a la explicación platónica de las formas universales, fueron, por supuesto, criticados por filósofos posteriores (Arnzen 2011; Benevich 2019). Estas críticas no revivieron el platonismo matemático y/o el pitagorismo en la filosofía islámica posterior a Avicena. Dicho esto, las discusiones sobre la debilidad y la fuerza de los argumentos a favor y en contra del platonismo matemático continuaron siendo de interés para los filósofos post-avicenianos. Quizás la obra más importante en la que se recopilan tales argumentos es un libro, titulado Las formas inteligibles platónicas, escrito entre 1329 y 1339, por un autor desconocido (ver el texto árabe del libro en Badawī 1947: 1-145, y su versión en alemán). traducción en Arnzen 2011: Apéndice 1).

1.2 Qué son los objetos matemáticos

Ahora que sabemos qué objetos matemáticos no lo son para los filósofos musulmanes, debemos preguntarnos cuáles lo son. En su Metafísica (VI.1,1026a13-19) Aristóteles clasifica diferentes ciencias teóricas según el estatus ontológico de los objetos que estudian (Cleary 1994). Los principales criterios de Aristóteles para distinguir las diferentes ciencias entre sí son el alcance y la calificación de la asociación de la materia de las ciencias con el movimiento y la materialidad. Empleando un enfoque similar, en su Los objetivos de la metafísica de Aristóteles (Maqāla fī aghrāḍ kitāb mā baʿd al-ṭabīʿa), al-Fārābī (m. 950) argumenta que los temas de las matemáticas, es decir, los objetos matemáticos, son abstractos (mujarrad) de la materia en estimación (wahm) pero no en el mundo extramental. Por un lado, los objetos matemáticos se diferencian de los objetos que estudia la metafísica porque estos últimos están totalmente desligados de la materia tanto en la estimación como en el mundo extramental. Por otro lado, los objetos matemáticos se diferencian de los objetos físicos sensibles porque no se pueden separar de la materia, ni en la estimación ni en el mundo extramental. Así, las matemáticas ocupan una posición intermedia entre la metafísica y la física. La asociación de los objetos matemáticos con la materia es más fuerte que la de los objetos de la metafísica pero más débil que la de los objetos de la física. (El árabe original del libro de al-Fārābī se puede encontrar en al-Fārābi 1890: 34–38 y Kiankhah 2015: 147–57. Para dos traducciones al inglés, consulte Bertolacci 2006: 66–72 y McGinnis & Reisman 2007: 78 –81).

En su Enumeración de las ciencias (ʾIḥṣāʾ al-ʿulūm), al-Fārābī presenta una discusión más detallada de la ontología de las matemáticas. Distingue las matemáticas aplicadas/prácticas (ʿamalī) de las matemáticas puras/teóricas (naẓarī). Los objetos de la aritmética aplicada son los números, ya que están asociados a cosas sensibles. La aritmética aplicada considera el número de cosas sensibles que existen en el mundo material. Por el contrario, la aritmética pura considera una concepción absoluta del número y la pluralidad. Estudia los números que se abstraen de todas las cosas numeradas del mundo sensible. De manera similar, la geometría aplicada considera las propiedades geométricas de objetos físicos específicos, mientras que la geometría pura trata con formas geométricas independientemente de si están unidas o no a objetos físicos específicos (al-Fārābi [Enum]: cap. 3; Endress 2003: 139–40).

Siguiendo la línea principal del enfoque de al-Fārābī, Avicena desarrolla una discusión más detallada sobre la división de las ciencias (Marmura 1980; Gutas 2003) según la cual los objetos matemáticos existen en el mundo extramental en asociación con determinadas especies de materia (por ejemplo, madera , oro, etc). A través de la función de la facultad de estimación, los objetos matemáticos pueden ser abstraídos en la mente de las especies específicas de materia a las que están apegados en el mundo extramental. Sin embargo, todavía deben concebirse como cosas materiales. En otras palabras, los objetos matemáticos en la mente están separados de determinadas especies de materia, aunque no de la materialidad misma (Avicena [Met]: cap. I.2; Di Vincenzo 2021: 20–27). Avicena argumenta que los números (aʿdād) y las magnitudes (maqādīr), como los representantes más generales de los objetos de la aritmética y la geometría, respectivamente, son accidentes (aʿrāḍ) y propiedades de los objetos físicos que existen en el mundo sensible (Avicena [Met]: cap. III.3–4). Ni los números ni las magnitudes tienen subsistencia inmaterial independiente en el mundo extramental. Las magnitudes (o formas geométricas, para ser más específicos) no pueden separarse de la materialidad ni siquiera en la mente (Avicena [Met]: cap. III.4 sec.2 y VII.2, sec. 21).

Por el contrario, los números pueden considerarse completamente separados de la materia y la materialidad. Sin embargo, tal consideración de los números es más metafísica que matemática (Endress 2003: 142; Zarepour 2016: sec. 4). Los números, en tanto sujetos de estudios matemáticos, deben ser receptivos a la disminución y al aumento. Por lo tanto, incluso en la mente, deben concebirse como propiedades de las cosas materiales (Avicena [Met]: cap. I.3, secs. 17–19). En suma, los objetos matemáticos existen en el mundo extramental como las propiedades de las cosas físicas constituidas por determinadas especies de materia. Los objetos matemáticos pueden abstraerse de estas determinadas especies de materia en la mente. Pero todavía deben ser considerados como propiedades de las cosas materiales. De lo contrario, no pueden ser objeto de estudios matemáticos. La discusión de Avicena sobre los roles de la facultad de estimación y el proceso de abstracción en los estudios matemáticos se ha interpretado de dos maneras diferentes. Algunos académicos (McGinnis 2006; 2017; Ardeshir 2008; Fazlıoğlu 2014; Tahiri 2016; 2018) piensan que los objetos matemáticos son en primer lugar objetos mentales y que la abstracción es un mecanismo para construir objetos matemáticos. Al atribuir una visión literalista a Avicena, algunos otros (Marmura 1980; 2005; Zarepour 2016; 2021; McGinnis 2019) argumentan que los objetos matemáticos existen literalmente en el mundo físico y que la abstracción es un proceso cognitivo para captar conceptos matemáticos, en lugar de producir objetos matemáticos.

Estas diferentes interpretaciones nos recuerdan el contraste entre las lecturas literalista (Mueller 1970; 1990) y abstraccionista (Lear 1982; Hussey 1991) de la ontología matemática de Aristóteles. La objeción más obvia a la visión literalista es que, a diferencia de los objetos físicos, que son inexactos e imperfectos, los objetos matemáticos parecen ser perfectos y exactos (o idealizados). Por ejemplo, parece que no existe ningún objeto físico perfectamente circular cuya circunferencia no sea (al menos en una medida modesta) irregular. Para refutar esta objeción contra la lectura literalista de la ontología de las matemáticas de Avicena, se ha argumentado que respalda la existencia de objetos matemáticos perfectos en el mundo físico (Zarepour 2016: sec. 5; 2021: sec. 4).

Esto probablemente se deba al énfasis de Avicena y al-Fārābī en el papel de la estimación (wahm) en la concepción de objetos matemáticos que, en la filosofía posterior a Avicena, a menudo se hace referencia a las matemáticas como una ciencia estimativa (wahmī o mawhūm) (Pines 1974). Antes o en la época de Avicena, muchos pensadores musulmanes habían enfatizado que los objetos matemáticos existen, de una forma u otra, en el mundo físico. Por ejemplo, en El Libro de Instrucción (Kitāb al-tafhīm ([Instr]), al-Bīrūnī (m. ~1048) defiende una descripción de la naturaleza de los objetos matemáticos que parece tener fuertes afinidades con la lectura literal de Avicena (Samian 2011; 2014). En la misma línea, Ibn al-Haytham (m. 1040), en las primeras páginas de su Resolución de Dudas (Ḥall shukūk, [Dudas]), argumenta que los objetos geométricos existen en el mundo sensible. puede ser abstraído de la materia a través de la actividad de la facultad de la imaginación (takhayyul), cuya función en la teoría de la mente de Ibn al-Haytham es muy similar a la función de estimación en la psicología de Avicena. Sin embargo, en contraste con Avicena y Aristóteles (De anima 428a5-18), Ibn al-Haytham piensa que las formas imaginadas, que se abstraen de los objetos físicos, tienen una existencia más real. Para él, la existencia real (ḥaqīqī) de los objetos matemáticos se ejemplifica en la imaginación y la distinción (tamyīz), otra facultad cognitiva en la filosofía de la mente de Ibn al-Haytham, que juega un papel crucial en la comprensión de conceptos universales a través de la mediación de formas imaginadas. (Ver Ighbariah & Wagner 2018: secs. 79–81. R. Rashed [1993: 2:8–19] cree que hubo dos pensadores musulmanes diferentes llamados "Ibn al-Haytham". Sabra [1998; 2003] rechaza la opinión de Rashed y aquí sigo la posición de Sabra).

En la filosofía posterior a Avicena, la afirmación de que los objetos matemáticos son mentales (o estimativos o imaginativos) se convirtió en la opinión más popular y fue enfatizada cada vez más por diferentes pensadores. La inclinación hacia este enfoque se debió en parte a las poderosas críticas a la versión de Avicena de la ontología de las matemáticas. Por ejemplo, Suhrawardī ofreció fuertes objeciones a la existencia de números en el mundo físico como accidentes de cosas sensibles. Considere un grupo de cuatro individuos. Avicena piensa que la cuaternidad (ʾarbaʿīya) es un accidente de estas cuatro personas. Pero Suhrawardī lo encuentra insostenible. Él argumenta que:

o la cuaternidad debe ser completa en cada uno de los individuos, lo cual no es el caso, o bien debe haber algo de cuaternidad en cada uno, que sólo puede ser la unidad. Por lo tanto, o la totalidad de la cuaternidad no debe tener otro lugar que el intelecto, o bien ni la cuaternidad ni nada de la cuaternidad puede estar en cada uno. En esta última suposición, también, la cuaternidad está sólo en el intelecto. (Suhrawardī, La filosofía de la iluminación [1999: 48]).

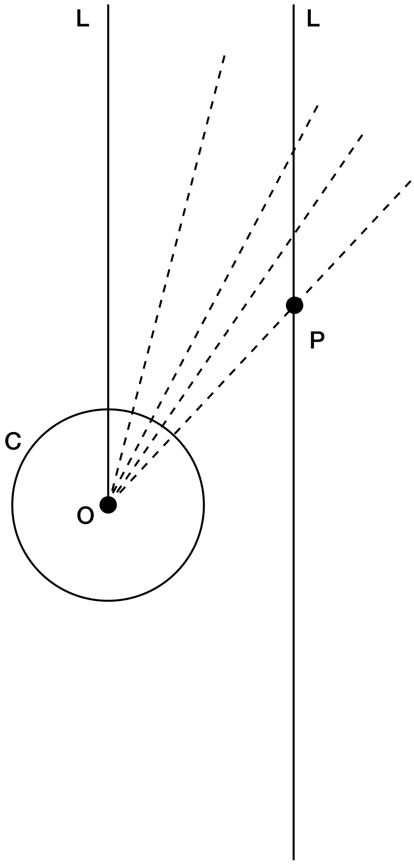
Él cree que es sólo nuestra mente la que puede imponer una unidad a una pluralidad de cuatro entidades sensibles distintas. No hay nada en el mundo extramental que pueda unir naturalmente cuatro cosas separadas de tal manera que acepten colectivamente el accidente de la cuaternidad. Por lo tanto, para Suhrawardī, los números (y los objetos matemáticos en general) son solo cosas dependientes de la mente (iʿtibārī) (Ziai 1990: 108; Walbridge 2000: 63 y 78–79). Mullā Ṣadrā (m. 1640) desarrolla una línea de argumentación similar. Acepta que hay pluralidades en el mundo extramental. Pero insiste en que es sólo a través de la actividad de nuestra mente que un grupo de objetos distintos puede considerarse una unidad. No hay nada en el mundo extramental que otorgue unidad a un grupo arbitrario de objetos distintos (Mullā Ṣadrā, Al-Shawāhid al-rubūbīya, [1982: 65]). Esta línea de argumentación contra la consideración de los números como propiedades de los objetos físicos nos recuerda la crítica de Frege a esta idea (Frege 1884: §§ 21–25).

Un punto de inflexión en la interpretación de los objetos matemáticos como objetos mentales es apelar a la noción de nafs al-ʾamr para describir el estado ontológico de los objetos matemáticos y aclarar la naturaleza de los creadores de la verdad de las proposiciones matemáticas. La frase "nafs al-ʾamr" significa literalmente la cosa misma. Pero su contenido técnico es difícil de capturar en la traducción. Aunque esta frase también aparece en los escritos de Avicena, es probable que sea Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (m. 1274) quien utilizó la frase por primera vez en un sentido técnico y teórico. Diferentes filósofos han entendido que esta frase se refiere a diferentes cosas, incluido el conocimiento divino, el Intelecto Activo, el reino de las ideas, etc. (Kaş 2021; Spiker 2021). La importancia de la teoría de nafs al-ʾamr para la filosofía de las matemáticas es que puede permitirnos preservar el realismo del juicio incluso sin el realismo del objeto. Algunos filósofos (p. ej., Sayyid al-Sharīf al-Jurjānī, m. 1413) han utilizado esta teoría para demostrar que, aunque los objetos matemáticos son meramente estimativos (wahmī) y no tienen una existencia independiente de la mente, los juicios matemáticos son ciertos (yaqīnī) y sus valores de verdad son independientes de la mente. En otras palabras, con respecto a las matemáticas, el realismo de juicio aún puede defenderse incluso cuando se rechaza el realismo de objetos (Fazlıoğlu 2014; Hasan 2017).

Otro tema importante pertinente a la ontología de las matemáticas es la naturaleza de los objetos algebraicos. Una incógnita algebraica (o, una variable algebraica, como la llamamos hoy) puede referirse indistintamente a un número oa una magnitud geométrica. Entonces, la naturaleza de un objeto algebraico no es la misma que la de los números o las formas geométricas. Desafortunadamente, la ontología híbrida de este tipo especial de objetos matemáticos rara vez (si es que lo ha sido) se ha discutido como una ontología diferente de las de los números y las magnitudes. Pero se ha argumentado que la familiaridad de filósofos como al-Fārābī y Avicena con la teoría algebraica presentada por al-Khwārizmī (m. 850) en su Kitāb al-jabr wa al-muqābala los inspiró a desarrollar una ontología general de cosas (ashyāʾ) que no es ni platónico ni aristotélico (R. Rashed 1984a; 2008; 2015: 716–18; 2018).

1.3 Infinito

El problema del infinito es uno de los temas filosóficos relacionados con las matemáticas que más se discutió en la filosofía islámica medieval. Hay muchos tratados que sostienen que ningún número puede ser infinito. Por ejemplo, en respuesta a una serie de preguntas planteadas por Abū Mūsā ʿĪsā Ibn Usayyid, Thābit Ibn Qurra analiza la naturaleza de los números y argumenta que no existe un número infinito. Además, muestra que los conjuntos infinitos de números pueden ser de diferentes tamaños (Pines 1968; Sabra 1997; Mancosu 2009: sec. 2; M. Rashed 2009; Zarepour 2020b: sec. 4.2). Yaḥyā Ibn ʿAdī (m. 974), en su Tratado sobre el Infinito (Maqala fī ghayr al-mutanāhī), proporciona un conjunto diferente de argumentos para establecer que el infinito no es predicable de los números (McGinnis 2010: sec. 3). Pero los siguientes tres argumentos a favor del finitismo son probablemente los más discutidos en la tradición islámica:

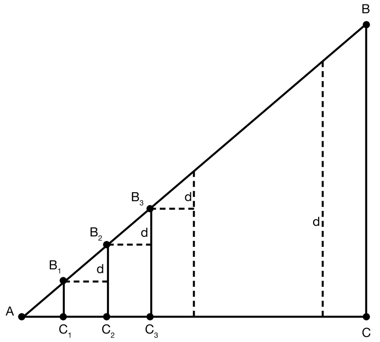


(1) El Argumento de la Colimación (burhān al-musāmita): Considere la recta L que comienza en el centro O de un círculo C, corta la circunferencia de C y se extiende infinitamente. Supongamos, además, que hay una recta distinta L′, que es paralela a L e infinitamente extendida en ambas direcciones. Ahora suponga que L comienza a girar alrededor de O y se acerca a L′, mientras que

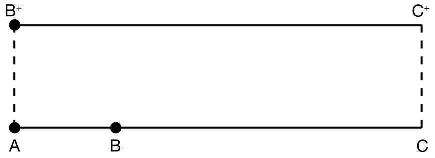
L′ está inmóvil y fijo. Como resultado, L y L′ se cruzan. Entonces, hay un momento en el que las dos rectas son paralelas y hay un momento en el que se cruzan. Por lo tanto, debe haber un momento de tiempo T y un punto P en L′ en el que las dos rectas se cortan entre sí por primera vez, o eso es lo que dice el argumento. Pero obviamente no existen tales T y P. Por cada T en el que L y L′ se intersecan, podemos encontrar un momento anterior de tiempo T′ (es decir, T′<T) en el que las dos rectas ya se intersecan. Entonces, parece que tenemos una contradicción. Por un lado, debe haber un primer momento de intersección (o tal es la expectativa de los defensores del argumento). Por otro lado, no puede haber tal momento. Por lo tanto, la suposición inicial del argumento, que es la existencia de rectas infinitas, debe rechazarse. No hay magnitud unidimensional infinita y, en consecuencia, no hay magnitudes infinitas en general.

Abū Sahl al-Qūhī (m. 1000) propuso una variación del escenario anterior, que probablemente se originó en De Caelo de Aristóteles (I.5, 272a8-20), para rechazar el dogma aristotélico de que una distancia infinita no se puede atravesar en un tiempo finito. Esto se debe a que el argumento anterior muestra que L puede atravesar L′ en un período de tiempo finito igual a la mitad del tiempo de rotación de L alrededor de O durante una ronda (R. Rashed 1999; McGinnis 2010: sec. 3). Por el contrario, Avicena emplea el Argumento de la Colimación en ciertos lugares (Avicena, Al-Najāt [1985: 233–44]; [Fís. 1]: cap. II.8, [8]) para rechazar la posibilidad de movimiento circular en un vacío infinito y en otros lugares (Avicena, ʿUyūn al-ḥikma, cap. 3, 20) para rechazar la infinitud real de magnitudes (Zarepour 2020b: sec. 3.1; R. Rashed 2016: 302–6; 2018: sec. 11.2). El argumento de la colimación es criticado, entre otros, por Abū al-Barakāt al-Baghdādī (m. 1165) en su Al-Muʿtabar (vol. 2, 83–84 y 86), al-Ṭūsī en su Talkhīṣ al-Muḥassal ([1985: 217]), y al-Ḥillī (m. 1325) en su Nihāya al-marām fī ʿilm al-kalām (vol. 1, 256–258). El argumento también es defendido, entre otros, por Fakhr al-Dīn al-Rāzī (m. 1209) en su Al-Mabāḥith al-mashriqīya (vol. 1, 196) y Mullā Ṣadrā en su Asfār (vol. 4, 21– 23).

(2) El Argumento de la Escalera (burhān al-sullam): Si pueden existir rectas infinitas, entonces puede haber un ángulo agudo cuyos lados sean infinitos. Supongamos que AB y AC son dos rectas infinitas que se cortan en A y forman un ángulo agudo. AB y AC se extienden infinitamente en las direcciones de B y C, respectivamente. Ahora considere las rectas paralelas Bi Ci (para números enteros i ≥ 1) que cortan AB y AC de modo que la distancia entre cada dos rectas consecutivas es igual a la distancia de B1 C1 de A. Por lo tanto, cada recta es más larga que la recta anterior por un longitud fija, digamos d (es decir, para cada entero i ≥ 1, Bi +1 Ci+ 1− Bi Ci =d). Ahora considere BC. Está más lejos que cualquier Bi Ci de A. Por lo tanto, BC es más largo que cualquier Bi Ci. Esto indica que BC debe ser realmente infinito. Sin embargo, BC está confinado entre dos rectas (es decir, AB y AC). Termina en B y C. Por lo tanto, también debe ser finito. En consecuencia, B C debe ser tanto finito como infinito. Esto es imposible. Entonces, la suposición inicial sobre la que construimos el argumento es falsa. No puede existir una recta infinita (y, a fortiori, ninguna magnitud infinita) (R. Rashed 2016; 2018: sec. 11.2; Zarepour 2020b: sec. 3.2).



El argumento de la escalera es una rehabilitación de un argumento aristotélico presentado en De Caelo (I.5, 271b26–272a7). Avicena discute este argumento en la Física de "La Curación" (Avicena [Fís. 2]: cap. III.8, [7]). El argumento ha sido objeto de un debate de larga data en la filosofía post-aviceniana (McGinnis 2018). El argumento fue criticado, entre otros, por Abū al-Barakāt en su Al-Muʿtabar (vol. 2, 84–86) y Najm al-Dīn al-Kātibī al-Qazwīnī (m. 1277) en su Ḥikma al-ʿayn ([2002: 38–39]). Por otro lado, las defensas del argumento de la escalera se pueden encontrar, entre otros, en el comentario de al-Ṭūsī sobre los Indicadores y recordatorios de Avicena (en Avicena [Indicadores]: namaṭ I, 183–191) y el comentario de Mullā Ṣadrā sobre Hidāya de al-Abharī. (Sharḥ Al-Hidāya al-Athīrīya, 65–69).
(3) El argumento del mapeo (burhān al-taṭābuq o al-taṭbīq): Considere una línea realmente infinita AC que comienza desde A y se extiende infinitamente en la dirección de C. Quite un segmento finito AB desde el comienzo de AC. Supongamos que B∗C∗ es una copia de (y, en consecuencia, de la misma longitud que) BC. Compara el tamaño de B∗C∗ con AC mapeando el primero sobre el segundo para que las dos rectas sean paralelas y B∗ esté justo enfrente de A. B∗C∗ debe extenderse infinitamente en la dirección de C∗. De lo contrario, B∗C∗ sería finito. Esto significa que BC también sería finito. Como resultado, AC, que es la suma de BC con el segmento finito AB, sería finito. Dado que esto contradice la suposición inicial de que AC es en realidad infinita, B∗C∗ debe extenderse infinitamente en la dirección de C∗. Pero si es así, entonces B∗C∗ y AC se corresponden entre sí, en el sentido de que ninguna parte de uno de ellos queda descubierta por la otra. Así, basándonos en la cuarta noción común del primer libro de los Elementos de Euclides —según la cual las cosas que se corresponden entre sí son iguales entre sí ([1908: vol. 1, 155])— podemos concluir que AC es igual a B∗C∗. Esto indica que AC también sería igual a BC, que es parte propia de AB. Sin embargo, la quinta noción común euclidiana establece que tal igualdad entre todo y parte es absurda ([1908: vol. 1, 155]). Por lo tanto, AC no puede ser igual a BC. En consecuencia, debe rechazarse la suposición inicial de que AC puede ser una recta realmente infinita. No puede haber tal magnitud realmente infinita.



Se pueden encontrar versiones anteriores del argumento del mapeo en diferentes lugares de la obra de al-Kindī (Rescher & Khatchadourian 1965; Shamsi 1975; Adamson 2007: cap. 4; Zarepour 2020b: n. 52). Avicena presenta versiones más precisas de este argumento (Marmura 1960; McGinnis 2010: sec. 4; Zarepour 2020b). La fuerza y la precisión de las versiones del argumento que proporcionan estos pensadores dependen, al menos en parte, de la precisión de su interpretación de la noción de igualdad de magnitudes geométricas. Se ha demostrado que algunos de los pensadores musulmanes tienen relatos bastante detallados de esta noción (R. Rashed 2019).
Al igual que los otros dos argumentos, el objetivo principal del argumento del mapeo es mostrar que en realidad no existe una magnitud continua infinita. Habiendo leído los Elementos de Euclides (libros 7-9), los pensadores musulmanes sabían que los números podían representarse fácilmente mediante magnitudes. Por lo tanto, cualquier argumento a favor de la imposibilidad de las magnitudes infinitas puede tomarse como un argumento en contra de la infinidad de los números. Pero, ¿qué hay de colecciones infinitas? Ninguno de los tres argumentos es directamente aplicable a colecciones infinitas de entidades discretas. Sin embargo, se ha argumentado que Avicena probablemente

sabía que el Argumento del mapeo podría modificarse para que sea aplicable a colecciones infinitas de cosas numeradas discretas (Zarepour 2020b: sec. 4). Los tamaños de dos colecciones de entidades discretas se pueden comparar empleando la misma noción de "mapeo" que usamos anteriormente en el caso de magnitudes continuas. Sin embargo, en el caso de las colecciones de entidades discretas, esta noción debe hacerse efectiva en términos de correspondencia biunívoca entre los elementos de las dos colecciones en cuestión. Dos colecciones de entidades discretas se corresponden entre sí si cada miembro de una colección puede emparejarse con un (y solo uno) miembro de la otra, de modo que ningún miembro de ninguna de estas colecciones quede sin emparejar. Avicena parece haber sido consciente de que una colección infinita de entidades discretas puede ponerse en correspondencia biunívoca con algunas de sus subcolecciones propias.

Y encuentra esto tan absurdo como la correspondencia de una magnitud infinita con su propia submagnitud. Menciona explícitamente que el argumento del mapeo puede descartar las posibilidades tanto de magnitudes infinitas como de colecciones infinitas de entidades discretas (por ejemplo, números y cosas numeradas). Sin embargo, él mismo no hace explícito cómo funciona realmente este argumento en el caso de cosas discretas. No proporciona ningún ejemplo concreto de la aplicación del Argumento del mapeo al caso de las colecciones infinitas de objetos. Tal ejemplo se puede encontrar en las obras de filósofos post-avicenianos como Fakhr al-Dīn al-Rāzī (Sharḥ ʿUyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt [1994: 53]). Al-Ghazālī (m. 1111) ha mencionado el Argumento del mapeo en su Maqāṣid ([2000: 97–98]) y la transmisión más temprana de este argumento a la tradición latina es probablemente a través de la traducción latina de Maqāṣid en el tercer cuarto del s. XII.

Estos argumentos generalmente se discuten en el contexto de la física. Esto se debe a que están diseñados en primer lugar para mostrar que ningún infinito puede existir realmente en el mundo físico. Pero si, respaldando el literalismo, consideramos los objetos matemáticos como propiedades de los objetos físicos, entonces la imposibilidad de la existencia de infinitos reales en el mundo físico implica la imposibilidad de líneas geométricas infinitamente extendidas y conjuntos infinitos de números. Pero aquellos que rechazan el literalismo sobre la ontología de las matemáticas tienen puntos de vista diferentes sobre la aplicabilidad de tales argumentos a los objetos matemáticos. Por ejemplo, Fakhr al-Dīn al-Rāzī cree que el argumento del mapeo no puede rechazar la infinitud de la colección de números naturales porque convierte a los objetos matemáticos en entidades completamente inmateriales y dependientes de la mente (Sharḥ ʿUyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt [1994 : 53–57]). Aunque podemos apelar al Argumento del mapeo para rechazar la existencia de una colección infinita de objetos físicos distintos en el mundo extramental, este argumento no puede rechazar la existencia de un número infinito de objetos dependientes de la mente como los números, o al menos así lo parece al-Rāzī. creer (Zarepour 2020b: 4.1).

Curiosamente, algunos filósofos musulmanes han argumentado que incluso la mente tiene sus propias limitaciones en cuanto a la percepción de cosas infinitas. Por ejemplo, Ibn al-Haytham cree que aunque podemos imaginar líneas finitas de cualquier longitud arbitraria (es decir, independientemente de su longitud), no podemos imaginar una línea realmente infinita. En consecuencia, aunque podemos imaginar una línea finita más larga que el tamaño del universo, no podemos concebir una línea realmente infinita. Ibn al-Haytham sostiene que los infinitos reales no existen ni en el mundo extramental ni en la mente (Masoumi Hamedani 2013; Ighbariah & Wagner 2018: 80).

1.4 Continuidad

Las opiniones de los pensadores musulmanes sobre el continuo matemático se entrelazan con la posición que defienden en el debate entre el atomismo y el hilomorfismo sobre la naturaleza del mundo físico. Para Avicena no hay brecha entre el mundo físico y el reino de los objetos matemáticos. Esto es así al menos si aceptamos las interpretaciones de Avicena como un literalista con respecto a la ontología de las matemáticas. Él cree que las magnitudes geométricas son continuas en el sentido de que no tienen una parte real. En consecuencia, las dimensiones físicas son continuas y no tienen partes reales. Por supuesto, podemos dividir cualquier magnitud continua en partes más pequeñas. En el mundo físico, existe un límite inferior práctico para la longitud de las dimensiones físicas que, en la práctica, puede dividirse en magnitudes más pequeñas. Por el contrario, en nuestra facultad de estimación, este límite desaparece, y todas las magnitudes son potencialmente infinitamente divisibles. A pesar de esta diferencia práctica, teóricamente hablando, no hay diferencia entre la estructura de las líneas geométricas y las dimensiones físicas. Como resultado, la continuidad geométrica implica que el atomismo físico es falso. De hecho, Avicena apela a la continuidad matemática para rechazar el atomismo físico (Avicena [Fís. 2]: cap. III.3–5; Lettinck 1999; Dhanani 2015; McGinnis 2019: sec. 3).

A diferencia de Avicena, hay filósofos que avalan la continuidad matemática y el atomismo físico simultáneamente. Por ejemplo, Shahrastānī (m. 1153) insiste en que el juicio de la facultad de estimación no es lo suficientemente fiable como para convencernos de que las magnitudes físicas pueden soportar divisiones potencialmente infinitas. Él cree que las magnitudes físicas no son infinitamente divisibles. El número de sus partes, ya sean reales o incluso potenciales, es finito. Shahrastānī nos recuerda que aunque es imaginable que el tamaño del universo sea infinito, los filósofos suelen rechazar que el universo sea infinito. Basándose en un enfoque similar, Shahrastānī sostiene que aunque cada magnitud es imaginable como infinitamente divisible, existen fuertes argumentos que muestran que la facultad de estimación está equivocada en este caso y que ninguna magnitud física es infinitamente divisible. La extensibilidad infinita del tamaño del universo en la estimación es compatible con que el universo sea finito. De manera similar, la divisibilidad infinita de magnitudes en la estimación podría ser compatible con que tengan solo un número finito de partes (potenciales) en el mundo extramental, o eso parece creer Shahrastānī (al-Shahrastānī Summa philosophiae, 513; McGinnis 2019). Esto significa que si tomamos los objetos matemáticos como meras construcciones estimativas, entonces podemos reconciliar la continuidad puramente matemática con el atomismo físico.

Proponiendo una modificación sutil, Fakhr al-Dīn al-Rāzī (Al-Manṭiq, vol. 6, capítulo 6, 63) argumenta contra Demócrito que todo lo que es divisible en la imaginación es divisible en el mundo extramental. Él cree que hay un límite inferior a la longitud de las magnitudes divisibles que podemos imaginar. No es cierto que toda magnitud, por pequeña que sea, sea divisible en la estimación. No rechaza que en la geometría euclidiana las magnitudes sean infinitamente divisibles. Pero parece no aceptar que sea posible hacer una imagen visual (mediante la facultad de estimar) de todas las magnitudes de las que podamos hablar en el contexto de la geometría euclidiana. Abrazando el atomismo físico (en sus obras posteriores), al-Rāzī niega que la geometría euclidiana continua pueda representar la estructura real del mundo extramental (Setia 2006; Eftekhari 2018; 2019). La afirmación de que la continuidad no tiene otra realidad que la facultad de estimar a menudo se reafirma en los trabajos de los atomistas posteriores como ʿAḍūd al-Dīn al-ʾĪjī (m. 1355) (Hasan 2017: 233–35).

2. EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS

2.1 Captación de conceptos matemáticos

La mayoría de los pensadores musulmanes que han hablado sobre la epistemología de los conceptos matemáticos creen que estos conceptos se forman a través de algunos mecanismos cognitivos cuya primera entrada son los datos que recibimos a través de nuestros sentidos externos. Los detalles de tales mecanismos son explicados de diferentes maneras por diferentes filósofos, dependiendo de su imagen general de la psicología cognitiva humana. Por ejemplo, Avicena presenta un experimento mental que muestra que no se pueden comprender conceptos matemáticos sin la percepción de los sentidos (Avicena [Met.], cap. VII.3, sec. 1; Zarepour 2019: sec. 5; 2021, sec. 3). Esto indica que Avicena respalda algún tipo de empirismo conceptual sobre las matemáticas. Según la interpretación literal de la ontología de las matemáticas de Avicena, los objetos matemáticos existen en el mundo sensible como atributos connotativos no sensibles (maʿānī) de los objetos físicos. Como todos los demás atributos connotativos, las entidades matemáticas son percibidas por la facultad de estimación. Por ejemplo, es la facultad de estimación la que percibe la dualidad cuando vemos dos libros. En tal experiencia, los datos sensibles recogidos por los sentidos externos serían transferidos a la facultad de estimación por mediación de la facultad del sentido común (ḥiss mushtarak). La estimación nos permite pasar por alto todas las demás características de la experiencia que hemos tenido y percibir la dualidad que no es directamente accesible a nuestros sentidos externos.

Incluso en la explicación literal de la ontología de las matemáticas, todavía hay muchas entidades matemáticas con las que los matemáticos podrían involucrarse pero que no existen en el mundo extramental (por ejemplo, una forma geométrica compleja y extraordinaria sin contrapartida en el mundo sensible). Avicena cree que la facultad de la imaginación (mutakhayyila) puede construir imágenes mentales de tales objetos analizando, sintetizando, separando y combinando las imágenes de elementos más simples que previamente han sido percibidos y almacenados en nuestras facultades cognitivas (Zarepour 2021: sec. 3). Pero si respaldamos la interpretación abstraccionista de la ontología de las matemáticas de Avicena, entonces todos los objetos matemáticos son construcciones mentales. No existe ningún objeto matemático en el mundo extramental que pueda ser percibido directamente por la estimación. Según esta interpretación, la facultad de estimación coopera con la facultad de imaginación para producir objetos idealizados, ninguno de los cuales tiene una contrapartida fuera de nuestras mentes. Son los actos mentales realizados por estas facultades los que nos permiten construir formas geométricas y números (Ardeshir 2008; Tahiri 2016; 2018).

En cualquier caso, dado que la estimación es una facultad corporal, no puede comprometerse con cosas completamente inmateriales. Entonces, percibe las entidades matemáticas como cosas asociadas con la materia (aunque no con especies específicas de ella). Los objetos de estimación no son conceptos universales inteligibles. Entonces, el proceso cognitivo de captar conceptos matemáticos debe completarse agregando el Intelecto Activo a nuestra historia (Zarepour 2021). En una lectura de la epistemología de Avicena (Nuseibeh 1989; Davidson 1992: cap. 4; Goodman 1992 [2006]; Black 2014), el acto de la facultad de estimación prepara nuestra alma para recibir los conceptos universales que serán emanados por el Intelecto Activo. En otra explicación de la epistemología de Avicena (Hasse 2001; Gutas 2012), el Intelecto Activo es simplemente un reservorio de conceptos inteligibles a los que encontramos acceso debido a la función preparatoria e ineliminable de las facultades internas. En suma, la adquisición de conceptos matemáticos es un proceso que comienza con la percepción sensorial y termina con la función del Intelecto Activo. Y entre estas dos etapas, la operación de las facultades internas en general y las facultades de estimación e imaginación en particular es necesaria e ineludible.

En las obras de los científicos contemporáneos de Avicena se presentan imágenes muy similares, aunque mucho menos sofisticadas, del procedimiento para captar conceptos matemáticos. Por ejemplo, Ibn al-Haytham habla de solo dos facultades: imaginación (takhayyula) y distinción (tamyīz). La imaginación es la facultad que construye objetos matemáticos idealizados de acuerdo con las impresiones que nos dejan a través de nuestras percepciones sensoriales. Por ejemplo, la imaginación nos permite abstraer magnitudes geométricas de los cuerpos sensibles que vemos en el mundo exterior. Sin embargo, la transición de las imágenes de los objetos matemáticos a los conceptos matemáticos es algo que debe ser realizado por la facultad de distinción. Esta facultad juega un doble papel. Por un lado, contribuye a analizar, sintetizar, separar y combinar imágenes previamente percibidas (o producidas). Este papel se le asigna a mutakhayyila en la psicología de Avicena. Por otra parte, la facultad de distinción es un reemplazo del Intelecto Activo. En la filosofía de Ibn al-Haytham, el paso final de la conceptualización lo lleva a cabo la facultad de distinción. Se ha argumentado que el Intelecto Activo y la luz divina no juegan ningún papel significativo en la teoría del conocimiento de Ibn al-Haytham (Ighbariah & Wagner 2018).

Desarrollando un relato más o menos similar al de Avicena, al-Bīrūnī acepta que algunas entidades matemáticas como líneas y puntos existen en el mundo físico pero no pueden ser captadas por nuestros sentidos externos. Sin embargo, los datos que recibimos a través de nuestras experiencias sensoriales nos permiten percibir estos objetos y/o producir construcciones idealizadas que no existen en el mundo extramental (Samian 2011). Sin embargo, no parece tener una imagen clara de la psicología cognitiva en la que se distingan explícitamente los roles de las diferentes facultades. Por eso oscila entre dos cuadros, en uno de los cuales la estimación (wahm) es la primera facultad para aprehender los objetos matemáticos, mientras que en el otro este papel debe ser jugado por el intelecto (ʿaql). En el último punto de vista, nada por debajo del nivel del intelecto puede percibir objetos matemáticos. La vacilación de al-Bīrūnī entre los dos puntos de vista rivales se vuelve más evidente especialmente cuando aceptamos que tanto la versión persa como la árabe de Kitāb al-tafhīm están escritas por él mismo. Por ejemplo, en la versión árabe, afirma que los puntos no pueden ser concebidos por ninguna otra facultad que no sea el intelecto (al-Bīrūnī [Astro]: 3). En cambio, en la versión persa atribuye este papel a la estimación (al-Bīrūnī [Instr]: 7). No parece considerar ningún límite claro entre lo inteligible (maʿqūl) y lo estimativo (mawhūm).

En el contexto de las teorías de nafs al-ʾamr propuestas por pensadores musulmanes posteriores, los sentidos externos, la estimación y el intelecto cooperan entre sí para darnos una concepción de las entidades matemáticas tal como son en nafs al-ʾamr. Sin embargo, el proceso a través del cual podemos tener acceso y conocer el reino de nafs al-ʾamr no es menos misterioso que el papel del Intelecto Activo en la filosofía de Avicena.

2.2 Estados Epistemológicos de los Principios de las Matemáticas

Toda proposición es una estructura ordenada constituida a partir de conceptos. Pero para conocer una proposición, no basta con conocer sus componentes conceptuales. También tenemos que dar algunos pasos más. Siguiendo a Aristóteles y Euclides, la mayoría (si no todos) los filósofos musulmanes creen en explicaciones axiomáticas/fundamentalistas de la epistemología, según las cuales todas las instancias de conocimiento se construyen finalmente sobre los cimientos (mabādi') de conceptos y proposiciones básicos que pueden conocerse directamente y inmediatamente. Los conceptos y proposiciones no básicos pueden derivarse de los básicos mediante definiciones (taʿārīf o ḥudūd) y silogismos (qiyāsāt), respectivamente. Esto significa que después de adquirir los componentes conceptuales de una proposición P, aún debemos seguir los siguientes tres pasos:

ordenar y combinar los conceptos adquiridos para formar P como una unidad estructurada,

asentir a la verdad (taṣdīq) de las proposiciones fundamentales, y

estableciendo la verdad de P con algunos silogismos a partir de las proposiciones fundacionales.

Para Avicena, la facultad de la imaginación juega un papel crucial en los pasos (1) y (3). La imaginación nos permite llegar a proposiciones significativas explorando nuestro almacenamiento de conceptos captados previamente y combinándolos para crear varias estructuras ordenadas de conceptos (y examinar si forman o no una proposición significativa). Además, la imaginación nos permite considerar combinaciones de proposiciones para encontrar el (los) silogismo(s) adecuado(s) (serie de consecutivos) que nos pueden llevar a la proposición deseada. La parte más crucial de este proceso es encontrar términos medios adecuados para los silogismos que nos pueden llevar a la conclusión deseada. En la filosofía de Avicena, la facultad de la imaginación emprende esta operación de búsqueda. Una pregunta inmediata con respecto a este punto de vista es cómo la imaginación, como facultad corporal, puede entretener conceptos universales que se supone que son entidades inteligibles totalmente inmateriales. Varias respuestas posibles a esta pregunta son investigadas, entre otros, por Gutas (2001), Adamson (2004) y Black (2013).

En la filosofía de Ibn al-Haytham, esta es la facultad de distinción que juega el papel central con respecto a (1) y (3). (Más sobre (3) se dirá en la siguiente sección).

Las cosas se complican más cuando pasamos a (2). Siguiendo la antigua tradición griega, los filósofos musulmanes clasifican los principios fundamentales de las ciencias demostrativas en tres grupos: nociones/axiomas comunes (al-uṣūl al-mutaʿārafa), hipótesis (al-uṣūl al-mawḍūʿa) y postulados (muṣādarāt). En términos generales, las nociones comunes son las proposiciones más obvias que podemos conocer, los primeros principios que captamos. Las hipótesis y los postulados no son tan obvios como los axiomas. En principio necesitan ser probados. Estos dos grupos de principios suelen distinguirse en función de la actitud epistémica del alumno que los aprende. Las hipótesis son los principios fundamentales que parecen plausibles para el estudiante aunque no tenga pruebas para ellos. Por el contrario, los postulados parecen dudosos para el estudiante, en el sentido de que podría tener algunos sentimientos e ideas en contra de la plausibilidad de estos principios. El ejemplo de postulados más repetido en las obras de los pensadores musulmanes medievales es probablemente el postulado de las paralelas de la geometría euclidiana. Esta clasificación es defendida, entre otros, por al-Nayrīzī (d. 922; en Besthorn & Heiberg 1893: 14–26), al-Fārābi (Al-Manṭiq, caps. 87–90), Avicena (al-Burhān, cap. . I.12), y al-Ṭūsī (Asās al-ʾiqtibās, cap. V.1.15).

Dado que las hipótesis y los postulados matemáticos deben eventualmente probarse sobre la base de proposiciones previamente conocidas, parece que el estatus epistémico de las proposiciones matemáticas depende, al final, de cómo captamos el más obvio de estos principios. En otras palabras, parece que todas las proposiciones matemáticas pueden derivarse de axiomas a través del mecanismo totalmente a priori (= independiente de la experiencia sensorial) del silogismo demostrativo.

Los pensadores musulmanes no tienen consenso sobre el estatus epistémico de los principios de las matemáticas y los mecanismos cognitivos a través de los cuales asentimos a la verdad de estos principios. Por ejemplo, se puede demostrar que, según Avicena, cada proposición básica de las matemáticas está incluida en awwalīyāt (datos primarios) o fiṭrīyāt (o, más completamente, muqaddamāt fiṭrīyāt al-qiyās, que se traduce como 'datos con datos integrados'). en silogismos' de Gutas (2012). "El todo es mayor que la parte" y "cuatro es par" son dos de los ejemplos más famosos, respectivamente, de awwalīyāt y fiṭrīyāt. Según Avicena, los awwalīyāt no tienen términos medios y, por lo tanto, no se puede hacer ningún silogismo para demostrarlos.

Son demasiado básicos y obvios para necesitar una prueba (o para ser demostrables). Tan pronto como captamos todos los conceptos a partir de los cuales se constituye una proposición awwalī, asentimos inmediatamente a la verdad de esa proposición. Estas proposiciones son evidentes y necesarias. Nadie puede tener una duda racional sobre ellos. A diferencia de awwalīyāt, fiṭrīyāt tiene términos medios y debe probarse. Sin embargo, el silogismo a través del cual se debe establecer una proposición fiṭrī es tan simple que tan pronto como se captan el término menor (es decir, sujeto) y el término mayor (es decir, predicado), el término medio aparece en la mente y la verdad de se asiente esa proposición. Por ejemplo, inmediatamente después de captar los conceptos cuatro e incluso, aparece en nuestra mente el concepto divisible-por-dos y podemos afirmar el hecho de que "(todos) los cuatro son pares" a través del siguiente silogismo (Mousavian & Ardeshir 2018):

(Cada) cuatro es divisible por dos.

(Todo) divisible por dos es par.

Por lo tanto:

(Cada) cuatro es par.

Las verdades tanto de awwalīyāt como de fiṭrīyāt se aceptan mediante la operación natural (fiṭra) del intelecto. Entonces, después de comprender sus componentes conceptuales, podemos comprender estas proposiciones sin apelar a los datos que recibimos de nuestras experiencias sensoriales. Estas proposiciones se constituyen a partir de conceptos no a priori. Pero después de captar sus componentes conceptuales, estas proposiciones pueden justificarse a través de mecanismos a priori. Debemos tener cuidado, sin embargo, de que una prioridad no implique innatismo en el sentido de ser dado al nacer. Avicena rechaza que poseamos cualquier instancia de conocimiento proposicional al nacer. (Para conocer diferentes puntos de vista sobre el estado epistémico de los awwalīyāt y fiṭrīyāt avicenianos, consulte Zarepour 2020a; 2020c; Gutas 2020).

Se pueden encontrar relatos más o menos similares de las proposiciones básicas de las matemáticas en filósofos como al-Fārābi y al-Ṭūsī. Sin embargo, tanto algunos de los contemporáneos de Avicena como algunos pensadores posteriores a Avicena adoptaron un enfoque más empírico y/o más escéptico de la verdad de las proposiciones matemáticas. Por ejemplo, en su primer comentario sobre los Elementos de Euclides, Sharḥ musạdarāt, Ibn al-Haytham sigue la opinión dominante de que las proposiciones básicas de las matemáticas son evidentes, necesarias y racionalmente indudables. Pero, en su segundo comentario, Ḥall shukūk ([Dudas]), respalda una posición más empírica y argumenta que adquirimos estas instancias de conocimiento al enfrentarnos a un uso frecuente de ellas en la vida diaria. Consideremos, por ejemplo, la noción común "las cosas que se corresponden entre sí son iguales entre sí". Ibn al-Haytham dice que aceptamos esta proposición porque hemos visto repetidamente que cuando un cuerpo se mapea o se superpone a otro cuerpo y sus longitudes no se superan, nuestro intelecto (ʿaql) juzga que estos cuerpos (o, más precisamente, sus longitudes) son iguales. Sin tener tales experiencias, no podríamos llegar a asentir a la verdad de este axioma. Por lo tanto, nuestro conocimiento de tales axiomas depende en cierta medida de la experiencia sensorial (Ibn al-Haytham [Dudas]: 31; R. Rashed 2019).

En su Óptica (Sabra 1989), Ibn al-Haytham presenta un tratamiento interesante del principio "el todo es mayor que la parte", que tiene sorprendentes similitudes con el tratamiento de fiṭrīyāt de Avicena. Argumenta que este principio puede probarse mediante el siguiente argumento:

- **El todo supera a la parte.**

Todo lo que excede a otra cosa es mayor que ella.

- **Por lo tanto:**

El todo es mayor que la parte.

Las premisas mismas de este argumento deben justificarse a través de la operación del intelecto o la facultad de distinción (para usar la propia terminología de Ibn al-Haytham) sobre los datos que recibimos a través de nuestros sentidos (Sabra 1989: vol. I, 133–34; Ighbariah & Wagner 2018). Los rastros de estas actitudes hacia los axiomas y las nociones comunes se pueden encontrar en los trabajos de Fakhr al-Dīn al-Rāzī y algunos de mutikallimūn posteriores (Morrison 2014: 220–22; Hasan 2017: sec. 2.4.2; Ighbariah y Wagner 2018: 66–68).

2.3 Ars Analytica y Ars Inveniendi (El arte del análisis y el arte del descubrimiento)

Vale la pena mencionar que los pensadores musulmanes también han desarrollado interesantes teorías sobre cómo podemos llegar a las proposiciones desconocidas de las matemáticas a partir de las conocidas. En otras palabras, han ofrecido explicaciones detalladas de cómo se puede tomar el paso (3) —introducido en la sección anterior— en el contexto de las matemáticas en general y de la geometría en particular. Una pregunta central en este contexto era si y cómo (y en qué medida) lo que está pasando en la mente de un matemático cuando descubre (o inventa) una verdad matemática corresponde a lo que presenta como prueba de este descubrimiento (o invención).) en papel. En particular, era importante para los pensadores musulmanes saber si el orden de los pasos que da un matemático para descubrir una verdad matemática es idéntico al orden de las diferentes etapas de las justificaciones que proporciona para esa verdad.

Uno de los primeros intentos en este contexto es la teoría de la psicología de la invención matemática de Thābit Ibn Qurra. Sin embargo, probablemente fue su nieto, Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 946), quien estableció un área de estudios independiente pertinente a las preguntas antes mencionadas en su Sobre el método de análisis y síntesis en los problemas de geometría (R. Rashed & Bellosta 2000 : cap. I). Clasifica los problemas geométricos en diferentes grupos en función de diferentes criterios y, proporcionando ejemplos concretos, explica cómo se debe analizar cada grupo de problemas (taḥlīl) y cómo se puede sintetizar una solución para ellos (tarkīb). Destaca los posibles errores y desaciertos que se pueden cometer en el proceso de análisis y síntesis y explica cómo se pueden evitar. La siguiente figura importante en esta área es al-Sijzī (d. ~1020), quien escribió un libro (Tratado geométrico sobre resolución de problemas) sobre diferentes métodos que pueden facilitar el procedimiento de resolución de problemas en geometría. Pero el trabajo más maduro entre este tipo de estudios es quizás Fī al-taḥlīl wa al-tarkīb de Ibn al-Haytham (Sobre análisis y síntesis; R. Rashed 2006 [2017: 219–304]).

Un tema interesante discutido en esta área de la filosofía de las matemáticas fue la naturaleza de los problemas indecidibles; afirmaciones de cuya verdad o falsedad no tenemos prueba. Este tema fue discutido en particular por al-Samawʾal (m. 1180) en el contexto de la clasificación de problemas geométricos en su al-Bāhir fī al-jabr. Su proyecto de clasificación puede entenderse como una sucesión del de Ibn Sinān (R. Rashed 1984b [1994: 41–43]; 2008: sec. 3; 2015: 726–32).

2.4 Aplicabilidad y confiabilidad de las matemáticas

Si tomamos los objetos matemáticos como objetos puramente mentales o estimativos (mawhūm) que están construidos por el mecanismo de la abstracción y no tienen una realidad extramental, entonces es difícilmente justificable que las matemáticas y/o los modelos matemáticos por sí solos puedan darnos un conocimiento confiable del mundo extramental. No debería sorprender que aquellos que respaldan una versión no platónica y no literal de la ontología de las matemáticas encuentren esta ciencia menos segura y quizás menos valiosa que ciencias como la física y la metafísica. Es por eso que algunos académicos contemporáneos, que han leído a Avicena como defensor de una versión puramente abstraccionista de la ontología de las matemáticas, argumentan que para él, las matemáticas son menos útiles e inferiores a las otras dos ciencias (Hasan 2017: 225–26; Fazlıoğlu 2014: 11–13). Esta interpretación de la visión de Avicena es, por supuesto, problemática si lo tomamos como un literalista con respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos. Motivado por preocupaciones similares, Averroes cree que el hecho de que el ámbito de los objetos matemáticos esté separado de la realidad extramental hace que las matemáticas jueguen un papel menos significativo en la perfección humana que la física y la metafísica (Endress 2003: 150).

Las dudas sobre la capacidad de las matemáticas para representar con precisión el mundo extramental son aún más frecuentes entre los atomistas (Dhanani 1994: 101-40; Pines 1936 [1997: 110]). Por ejemplo, respaldando el atomismo físico en sus obras posteriores, Fakhr al-Dīn al-Rāzī cree que dado que se supone que las magnitudes son continuas en la geometría euclidiana, esta ciencia no puede presentar una imagen precisa del mundo atomístico discontinuo (Setia 2006: 126–28).

En su Al-Mawāqif, al-ʾĪjī desafía la confiabilidad de las ciencias matemáticas debido a su compromiso con entidades estimativas que son más frágiles (awhan) que una telaraña. Esta analogía se refiere al Corán 29:41 (Fazlıoğlu 2014: 6–7). Shams al-Dīn Muḥammad al-Bukhārī (m. 1429) defiende una visión igualmente escéptica de las matemáticas en su comentario sobre el Ḥikma al-ʿayn de al-Kātibī al-Qazwīnī. Como muchos de sus predecesores, al-Bukhārī sostiene que, en comparación con la física y la metafísica, las matemáticas son una fuente de conocimiento menos confiable sobre las cosas concretamente existentes. Es en respuesta a tales puntos de vista que al-Jurjānī apela a la maquinaria de nafs al-ʾamr para defender la confiabilidad de las matemáticas. Acepta que los objetos matemáticos son estimativos e imaginarios. Pero cree que se imaginan correctamente y de acuerdo con la realidad extramental. En este sentido, son completamente diferentes de las entidades ficticias, como las montañas de rubíes o los hombres de dos cabezas, que no reflejan nada en la realidad extramental (Hasan 2017: 7). Aunque las matemáticas se originan a partir de la estimación, aún pueden expresar verdades significativas sobre las cosas tal como son en nafs al-ʾamr. Por tanto, cree que el juicio de estimación puede en principio conformarse con el del intelecto; particularmente en el contexto de las matemáticas donde los productos de estimación se construyen de acuerdo con lo que percibimos del mundo extramental a través de nuestros sentidos. Aunque los objetos matemáticos son entidades estimativas, no son el resultado de una imaginación fantasiosa que no tiene conexión con la realidad, o eso parece creer al-Jurjānī (Fazlıoğlu 2014; Hasan 2017). La teoría de nafs al-ʾamr fue, entre otras cosas, el intento más prometedor de los pensadores musulmanes de reconciliar una versión antirrealista de la ontología de las matemáticas con una versión realista de las verdades matemáticas. Esta teoría pretende proporcionar una explicación de cómo las matemáticas, como estudio de entidades puramente estimativas, pueden ser útiles en el estudio del mundo físico. Desafortunadamente, el alcance del éxito de este proyecto aún no se ha estudiado exhaustivamente.

3. CONCLUSIÓN

Lo que se presenta aquí es solo un breve informe de los interesantes puntos de vista filosóficos que los pensadores musulmanes medievales desarrollaron sobre las matemáticas. De ninguna manera es exhaustivo. Muchos aspectos de los puntos de vista que discutí aquí aún no han sido estudiados en la literatura secundaria. No es exagerado decir que la filosofía de las matemáticas de muchos filósofos musulmanes no ha sido suficientemente abordada por los historiadores contemporáneos de la filosofía. Pero espero que las cosas reunidas en esta entrada hayan demostrado que la tradición islámica es un rico recurso para ideas y teorías innovadoras pertinentes a la filosofía de las matemáticas (y no, como suele pensarse, solo a los aspectos técnicos de las matemáticas).

BIBLIOGRAFÍA

Fuentes primarias

Abū al-Barakāt, Al-Muʿtabar fī al-ḥikma, ʿAbdallāh al-ʿAlawī al-Ḥaḍramī (ed.), Haiderabad: Dāʾira al-maʿārif al-ʿuthmānīya, 1939.

Avicena, [al-Burhān], al-Shifāʾ, al-Manṭiq, al-Burhān (Healing. Logic. Book of Demonstration), Abū l-ʿAlā ʿAfīfī (ed.), El Cairo: al-Maṭbaʿa al-amīrīya, 1956.

——, Al-Ishārāt wa al-tanbihāt, al-Ṭabī'īyāt, with Tūsī's Commentary at the Bottom of Page (Pointers and Reminders), Sulaymān Dunyā (ed.), El Cairo: Dār al-Maʿārif, 1957.

——, ʿUyūn al-ḥikma (Elements of Philosophy), A. Badawī (ed.), Beirut: Dār al-ʿIlm, 1980.

——, Al-Najāt, Muhammad Taqī Danishpazhūh (ed.), Teherán: Tehran University Press, 1985.

● ——, [Met.], The Metaphysics of "The Healing", Michael E. Marmura (ed. y trad.), Provo, UT: Brigham Young University Press, 2005.

● ——, The Physics of "The Healing", 4 books. Traducido en 2 tomos por Jon McGinnis (ed. y trad.), Provo, UT: Brigham Young University Press, 2009.

[Fís. 1], Books I & II

[Fís. 2], Books III & IV

● Badawī, ʿAbd al-Raḥmān (ed.), 1947, Al-muthul al-ʿaqlīya al-aflāṭūnīya, El Cairo: Printing House of the Egyption Library.

● al-Bīrūnī, [Astro], Art of Astrology: Kitāb al-tafhīm li-ʾawȧil ṣināʿa al-tanjīm, Traducido por by R. Ramsay Wright, Londres: LUZAC & co., 1934.

● [Instr], Kitāb al-tafhīm li-ʾawȧil ṣināʿa al-tanġīm (The Book of Instruction), Jalaluddin Homaei (ed.), Teherán: Anjuman āsār-e mellī, 1975.

● Di Vincenzo, Silvia, 2021, Avicenna, ›The Healing, Logic: Isagoge‹: A New Edition, English Translation and Commentary of the Kitāb al-Madḫal of Avicenna's Kitāb al-Šifāʾ, Berlín: De Gruyter. doi:10.1515/9783110726565

● Euclides, The Thirteen Books of Euclid's Elements, Traducido en 3 tomos por Thomas Little Heath, Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

● al-Fārābi, 1890, Alfārābi's Philosophische Abhandlungen, F. Dieterici (ed.), Leiden: E. J. Brill. Versión árabe.

● ——, [Al-Manṭiq], Al-Manṭiq ʿinda al-Fārābī, Majid Fakhry (ed.), Beirut: Dār al-mashriq, 1987.

● ——, ʾIḥṣāʾ al-ʿulūm (Enumeration of the Sciences), Ali Bou-Melhem (ed.), Beirut: Dār wa maktaba al-hilāl, 1996.

● al-Ghazālī, [Maqāṣid], Maqāṣid al-falāsifa, Maḥmūd Bījū (ed.), Damasco: Maṭbaʿa al-ṣabāḥ, 2000.

● al-Ḥillī, Ibn al-Muṭahhar, Nihāya al-marām fī ʿilm al-kalām, Fāḍil al-ʿIrfān (ed.), Qom: Mu'assasa al-imām al-Ṣādiq, 1998.

● al-Khwārizmī, Kitāb al-jabr wa al-muqābala, Ali Moustafa Musharrafa and Muhammad Mursi Ahmad (ed.), El Cairo: Maṭbaʿa Būl Bārbiya, 1937.
● Ibn al-Haytham, [Dudas], Kitāb fī ḥall shukūk kitāb Uqlīdis fī al-ʾuṣūl wa sharḥ maʿānīh (Resolution of Doubts), Fuat Sezgin (ed.), Fráncfort del Meno: Institute for the History of Arabic-Islamic Science at the Johann Wolfgang Goethe University, 1985.
● ––––, Sharḥ musāḍarāt kitāb Uqlīdis, Ahmed Azzab Ahmed (ed.), El Cairo: Dār al-kutub wa al-wathāʾiq al-qawmīya, 2005.
● Ibn ʿAdī, "Maqāla fī ghayr al-mutanāhī" ("Treatise on the Infinite"), en Maqālāt Yaḥyā Ibn ʿAdī al-falsafīya, Sahban Khalifat (ed.), Amán: The University of Jordan, 1988, 135–140.
● al-Kātibī al-Qazwīnī, Najm al-Dīn, Ḥikma al-ʿayn, Ṣāliḥ Āydīn Bin ʿAbd al-Ḥamīd al-Turkī (ed.), El Cairo, 2002.
● McGinnis, Jon and David C. Reisman, 2007, Classical Arabic Philosophy: An Anthology of Sources, Indianapolis, IN: Hackett Publishing Company.
● Mullā Ṣadrā, Al-Shawāhid al-rubūbīya, Sayyed Jalal al-Din Ashtiani (ed.), Mashhad: Mashhad University Press, 1982.
● ––––, [Asfār], Al-Ḥikma al-mutaʿāliya fī al-ʾasfār al-ʿaqliya al-arbaʿa, Beirut: Dār iḥyā al-turāth al-ʿarabī, 1990.
● ––––, Sharḥ Al-Hidāya al-Athīrīya, M. M. Fūlādkār (ed.), Beirut: Dār iḥyā al-turāth al-ʿarabī, 2001.
● Nicomachus, Kitāb al-madkhal ilā ʿilm al-ʿadad (كتاب المدخل الى علم العدد, Introducción a la Aritmética), traducción del original griego por Thābit Ibn Qurrah, Wilhelm Kutsch (ed.), Beirut, 1958.
● al-Rāzī, Fakhr al-Dīn, 1987, Al-Maṭālib al-ʿāliya fī ʿilm al-ʾilāhī, Ahmad Hijazi al-Saqa (ed.), El Cairo: Dār al-Kātib al-ʿArabī.
● ––––, 1992, Al-Mabāḥith al-mashriqīya, Qom: Bīdār.
● ––––, Sharḥ ʿUyun al-ḥikma, al-Ṭabīʿīyāt, M. Hejazi and A. A. Saqa (eds), Teherán, 1994.
● al-Samaw'al, al-Bāhir fī al-jabr (El espléndido libro de álgebra). Edición crítica como Al-Bahir en Algèbre d'As-Samaw'al, Salah Ahmad y Roshdi Rashed (eds), Damasco: Presses de l'Université de Damascus, 1972.
● al-Shahrastānī, [Summa philosophiae], The Summa Philosophiae of al-Shahrastānī: Kitāb nihāyatu l-iqdām fī ʿilmi ʾl-kalām, Alfred Guillaume (ed.), Londres: Oxford University Press, 1937.
● al-Sijzī, Geometrical Treatise on Problem Solving, Jan P. Hogendijk (ed.), Muhammad Bagheri (trans.), Teherán: Fatemi, 1996.
● Suhrawardī, The Philosophy of Illumination, John Walbridge and Hossein Ziai (eds/), Provo, UT: Brigham Young University Press, 1999.
● The Brethren of Purity, [Epistles], Epistles of the Brethren of Purity: On Arithmetic and Geometry - An Arabic Critical Edition and English Translation of EPISTLES 1 & 2, Nader El-Bizri (ed./trad.), Oxford: Oxford University Press, 2012.
● al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn, Asās al-ʾiqtibās, Mudarris Razavi (ed.), Teherán: Tehran University Press, 1948.
● ––––, Talkhīṣ al-Muḥassal, Beirut: Dār al-ʾaḍwāʾ, 1985.

Fuentes secundarias

● Adamson, Peter, 2004, "Non-Discursive Thought in Avicenna's Commentary on the Theology of Aristotle", en Interpreting Avicenna: Science and Philosophy in Medieval Islam, Proceedings of the Second Conference of the Avicenna Study Group, Jon McGinnis y David Reisman (ed.), Leiden: Brill, 87–111. doi:10.1163/9789047405818_008
● ––––, 2007, Al-Kindī, Oxford: Oxford University Press. doi:10.1093/acprof:oso/9780195181425.001.0001
● Al-Daffà, Ali Abdullah, 1977, The Muslim Contribution to Mathematics, Londres: Croom Helm.
● Ardeshir, Mohammad, 2008, "Ibn Sīnā's Philosophy of Mathematics", Rahman, Street, y Tahiri 2008: 43–62. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8_2

● Arnzen, Rüdiger, 2011, Platonische Ideen in der arabischen Philosophie: Texte und Materialien zur Begriffsgeschichte von suwar aflatuniyya und muthul aflatuniyya, Berlín: De Gruyter. doi:10.1515/9783110259827
● Avigad, Jeremy, 2007, "Philosophy of Mathematics", en The Edinburgh Companion to Twentieth-Century Philosophies, Constantin Boundas (ed.), Edimburgo: Edinburgh University Press, 234–251.
● Baffioni, Carmela, 2022, "The 'Brethren of Purity' and the Pythagorean Tradition", Caiazzo, Macris y Robert 2022: 296–321. doi:10.1163/9789004499461_011
● Benacerraf, Paul, 1973, "Mathematical Truth", The Journal of Philosophy, 70(19): 661–679. doi:10.2307/2025075
● Benevich, Fedor, 2019, "A Rebellion Against Avicenna? Suhrawardī and Abū l-Barakāt on 'Platonic Forms' and 'Lords of Species'", Ishrāq: Islamic Philosophy Yearbook, 9: 23–53.
● Berggren, 2016, Episodes in the Mathematics of Medieval Islam, segunda edición, Nueva York: Springer. doi:10.1007/978-1-4939-3780-6
● Bertolacci, Amos, 2006, The Reception of Aristotle's Metaphysics in Avicenna's Kitāb al-Šifāʾ: A Milestone of Western Metaphysical Thought, (Islamic Philosophy, Theology, and Science 63), Leiden: Brill.
● Besthorn, Rasmus O. and Johan L. Heiberg, 1893, Codex Leidensis 399, I: Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadschii cum commentariis Al-Narizii; Arabice et Latine ediderunt notisque instruxerunt, Copenhague: Libraria Gyldendaliana.
● Black, Deborah L., 2013, "Rational Imagination: Avicenna on the Cogitative Power", en Philosophical Psychology in Arabic Thought and the Latin Aristotelianism of the Thirteenth Century, Luis Xavier López-Farjeat y Jörg Alejandro Tellkamp (ed.), París: Vrin, 59–81.
● ——, 2014, "How Do We Acquire Concepts? Avicenna on Abstraction and Emanation", en Debates in Medieval Philosophy: Essential Readings and Contemporary Responses, Jeffrey Hause (ed.), Nueva York: Routledge, 126–144.
● Brentjes, Sonja, 2022, "Nicomachean Number Theory in Arabic and Persian Scholarly Literature", Caiazzo, Macris y Robert 2022: 112–140. doi:10.1163/9789004499461_005
● Caiazzo, Irene, Constantinos Macris, and Aurélien Robert (ed.), 2022, Brill's Companion to the Reception of Pythagoras and Pythagoreanism in the Middle Ages and the Renaissance, Leiden: Brill. doi:10.1163/9789004499461
● Cleary, John J., 1994, "Emending Aristotle's Division of Theoretical Sciences", The Review of Metaphysics, 48(1): 33–70.
● Davidson, Herbert A., 1992, Alfarabi, Avicenna, & Averroes, on Intellect: Their Cosmologies, Theories of the Active Intellect, and Theories of Human Intellect, Nueva York: Oxford University Press.
● De Smet, Daniel, 2022, "Pythagoras' Philosophy of Unity as a Precursor of Islamic Monotheism: Pseudo-Ammonius and Related Sources", con Caiazzo, Macris, y Robert 2022: 277–295. doi:10.1163/9789004499461_010
● Dhanani, Alnoor, 1994, The Physical Theory of Kalām, Leiden: Brill.
● ——, 2015, "The Impact of Ibn Sīnā's Critique of Atomism on Subsequent Kalām Discussions of Atomism", Arabic Sciences and Philosophy, 25(1): 79–104. doi:10.1017/S0957423914000101
● Eftekhari, Banafsheh, 2018, "The Inconsistency Between Geometrical Continuism and Kalām Atomism in Fakhr al-Dīn Rāzī", Philosophy of Science (Irán), 8(15): 1–26. [Eftekhari 2018 available online]
● ——, 2019, "Fakhr Rāzī's Theory of Motion in Interaction with Aristotelian Physics", Philosophy of Science, 9(17): 1–25. [Eftekhari 2019 available online]
● El-Bizri, Nader, 2018, "The Occult in Numbers: The Arithmology and Arithmetic of

the Ikhwān al-Ṣafā", in The Occult Sciences in Pre-Modern Islamic Cultures, Nader El-Bizri y Eva Orthmann (eds), Beirut: Orient-Institut / Würzburg: Ergon Verlag, 17–40.
● Endress, Gerhard, 2003, "Mathematics and Philosophy in Medieval Islam", en The Enterprise of Science in Islam: New Perspectives, Jan P. Hogendijk y Abdelhamid I. Sabra (eds), Cambridge MA: The MIT Press, 121–176.
● Fazlıoğlu, İhsan, 2014, "Between Reality and Mentality -Fifteenth Century Mathematics and Natural Philosophy Reconsidered-", Nazariyat İslam Felsefe ve Bilim Tarihi Araştırmaları Dergisi (Journal for the History of Islamic Philosophy and Sciences), 1(1): 1–39. doi:10.15808/Nazariyat.1.1.M0001
● Frege, Gottlob, 1884, Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau: w. Koebner; traducción de J. L. Austin de The Foundations of Arithmetic: A Logic-Mathematical Enquiry into the Concept of Number, Oxford: Blackwell, segunda edición revisada, 1953.
● Goodman, Lenn Evan, 1992 [2006], Avicenna, Londres: Routledge. Edición actualizada, Ithaca, NY: Cornell University Press, 2006
● Gutas, Dimitri, 2001, "Intuition and Thinking: The Evolving Structure of Avicenna's Epistemology", en Wisnovsky 2001:, 1–38.
● —, 2003, "Medical Theory and Scientific Method in the Age of Avicenna", en Before and After Avicenna: Proceedings of the First Conference of the Avicenna Study Group, David C. Reisman y Ahmed H. Al-Rahim (ed.), Leiden: Brill, 145–162.
● —, 2012, "The Empiricism of Avicenna", Oriens, 40(2): 391–436. doi:10.1163/18778372-00402008
● —, 2020, "The Myth of a Kantian Avicenna", Philosophy East and West, 70(3): 833–840. doi:10.1353/pew.2020.0039
● Hasan, Moiz, 2017, "Foundations of Science in the Post-Classical Islamic Era: The Philosophical, Historical, and Historiographical Significance of Sayyid Al-Sharīf Al-Jurjānī's (d. 1413) Project", tesis doctoral, University of Notre Dame.
● Hasse, Dag Nikolaus, 2001, "Avicenna on Abstraction", en Wisnovsky 2001: 39–72.
● Hussey, Edward, 1991, "Aristotle on Mathematical Objects", Apeiron, 24(4): 105–133. doi:10.1515/APEIRON.1991.24.4.105
● Ighbariah, Ahmad and Roy Wagner, 2018, "Ibn Al-Haytham's Revision of the Euclidean Foundations of Mathematics", HOPOS: The Journal of the International Society for the History of Philosophy of Science, 8(1): 62–86. doi:10.1086/695957
● Kaş, Murat, 2021, "Apprehension and Existence, Appearance and Reality: The Reception of Nafs al-amr Debates after the 13th Century", Ilahiyat Studies, 12(1): 7–39. doi:10.12730/13091719.2021.121.216
● Kiankhah, Leila, 2015, "A Research on and a Critical Edition of 'the Goals of Metaphysics'", Sophia Prennis, 11(2): 119–157. [Kiankhah 2015 available online]
● Lear, Jonathan, 1982, "Aristotle's Philosophy of Mathematics", The Philosophical Review, 91(2): 161–192. doi:10.2307/2184625
● Lettinck, Paul, 1999, "Ibn Sina on Atomism: Translation of Ibn Sina's Kitab Al-Shifa, Al-Tabi'iyyat I: Al-Sama' Al-Tabi'i Third Treatise, Chapter 3-5", Al-Shajarah: Journal of the International Institute of Islamic Thought and Civilization (ISTAC), 4(1): 1–51.
● Mancosu, Paolo, 2009, "Measuring the Size of Infinite Collections of Natural Numbers: Was Cantor's Theory of Infinite Number Inevitable?", The Review of Symbolic Logic, 2(4): 612–646. doi:10.1017/S1755020309990128
● Marmura, Michael E., 1960, "Avicenna and the Problem of the Infinite Number of Souls", Mediaeval Studies, 22: 232–239. doi:10.1484/J.MS.2.305953
● —, 1980, "Avicenna on the Division of the Sciences in the 'Isagoge' of His

'Shifa'", Journal for the History of Arabic Science, 4(2): 239–251.
● ——, 2005, "Translator's Introduction", en The Metaphysics of the Healing, Michael E Marmura (ed.), Provo, UT: Brigham Young University Press, xix–xxv.
● ——, 2006, "Avicenna's Critique of Platonists in Book VII, Chapter 2 of the Metaphysics of His Healing", en Arabic Theology, Arabic Philosophy: From the Many to the One: Essays in Celebration of Richard M. Frank, James Montgomery (ed.), Lovaina: Peeters Publishers, 355–369.
● Marquet, Yves, 2006, Les "Frères de la pureté", Pythagoriciens de l'Islam: la marque du Pythagorisme dans la rédaction des épîtres des Iḫwān al-Ṣafāʾ, París: S.E.H.A.
● Masoumi Hamedani, Hossein, 2013, "The Theologian and the Mathematician: Fakhr al-Dīn al-Rāzī and the Geometrical Works of Ibn al-Haytham", Journal for the History of Science (Irán), 11(1): 139–157.
● Mcginnis, Jon, 2006, "A Penetrating Question in the History of Ideas: Space, Dimensionality and Interpenetration in the Thought of Avicenna", Arabic Sciences and Philosophy, 16(1): 47–69. doi:10.1017/S0957423906000233
● ——, 2010, "Avicennan Infinity: A Select History of the Infinite through Avicenna", Documenti e Studi Sulla Tradizione Filosofica Medieval, 21: 199–221.
● ——, 2017, "Experimental Thoughts on Thought Experiments in Medieval Islam", en The Routledge Companion to Thought Experiments, Michael T. Stuart, Yiftach Fehige y James Robert Brown (ed), Londres: Routledge, 77–91.
● ——, 2018, "Mind the Gap: The Reception of Avicenna's New Argument against Actually Infinite Space", en Illuminationist Texts and Textual Studies: Essays in Memory of Hossein Ziai, Ali Gheissari, Ahmed Alwishah y John Walbridge (ed.), Leiden: Brill, 272–305. doi:10.1163/9789004358393_015
● ——, 2019, "A Continuation of Atomism: Shahrastānī on the Atom and Continuity", Journal of the History of Philosophy, 57(4): 595–619. doi:10.1353/hph.2019.0068
● Morrison, Robert, 2014, "What Was the Purpose of Astronomy in Ījīʾs Kitāb al-Mawāqif fī ʿilm al-kalām?" en Politics, Patronage and the Transmission of Knowledge in 13th–15th Century Tabriz, Judith Pfeiffer (ed.), Leiden: Brill, 201–229. doi:10.1163/9789004262577_009
● Mousavian, Seyed N. and Mohammad Ardeshir, 2018, "Avicenna on the Primary Propositions", History and Philosophy of Logic, 39(3): 201–231. doi:10.1080/01445340.2017.1408739
● Mueller, Ian, 1970, "Aristotle on Geometrical Objects", Archiv Für Geschichte Der Philosophie, 52(2): 156–171. doi:10.1515/agph.1970.52.2.156
● ——, 1990, "Aristotle's Doctrine of Abstraction in the Commentators", en Aristotle Transformed: The Ancient Commentators and Their Influence, Richard Sorabji (ed.), Ithaca, NY: Cornell University Press, 463–480.
● Nuseibeh, Sari, 1989, "Al-'Aql al-Qudsi: Avicenna's Subjective Theory of Knowledge", Studia Islamica, 69: 39–54. doi:10.2307/1596066
● Pines, Shlomo, 1968, "Thābit b. Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite", Actes du XIe Congrès International d'Histoire des Sciences [1965], Sect. III: Histoire des Sciences Exactes (Astronomie, Mathématiques, Physique), Wroclaw, 160–166. Reprinted in The Collected Works of Shlomo Pines, volume 2, Leiden: Brill, 1986, 423–429.
● ——, 1974, "Philosophy, Mathematics and the Concepts of Space in the Middle Ages", en The Interaction Between Science and Philosophy, Yehuda Elkana (ed.), Atlantic Highlands, NJ: Humanities Press, 75–90.

● —–, 1936 [1997], Beiträge zur islamischen Atomenlehre, Berlín: Heine. Traducido como Studies in Islamic Atomism, Tzvi Langermann (ed.), Michael Schwarz (trad.), Jerusalén: The Magnes Press, 1997.
● Porro, Pasquale, 2011, "Immateriality and Separation in Avicenna and Thomas Aquinas", en The Arabic, Hebrew and Latin Reception of Avicenna's Metaphysics, Dag Nikolaus Hasse y Amos Bertolacci (ed), Berlín: De Gruyter, 275–307.
● Rahman, Shahid, Tony Street, and Hassan Tahiri (eds.), 2008, The Unity of Science in the Arabic Tradition: Science, Logic, Epistemology and Their Interactions, Dordrecht: Springer Netherlands. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8
● Rashed, Marwan, 2009, "Thabit ibn Qurra sur l'existence et l'infini: les Rèponses aux questions posées par Ibn Usayyid", en Thābit ibn Qurra: Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad, Berlín: Walter de Gruyter, 619–674.
● Rashed, Roshdi, 1984a, "Mathématiques et Philosophie Chez Avicenne", en Etudes Sur Avicenne, Jean Jolivet y Roshdi Rashed (ed), París: Les Belles Lettres, 29–39.
● —–, 1984b [1994], Entre arithmétique et algèbre: recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, París: Les Belles lettres. Translated as The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra, Angela F. W. Armstrong (trad.), Dordrecht: Springer, 1994.
● —–, 1993, Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle: Ibn al-aytham, théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique, vol. 2, Londres: Al-Furqān.
● —–, 1996 [2012], Fondateurs et commentateurs, volume 1 en Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, Londres: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation. Translated as Founding Figures and Commentators in Arabic Mathematics, volume 1 en A History of Arabic Sciences and Mathematics, Nader El-Bizri (ed.), Roger Wareham, Chris Allen, y Michael Barany (trad.), Nueva York: Routledge, 2012. doi:10.4324/9780203636596
● —–, 1999, "Al-Qūhī vs. Aristotle: On Motion", Arabic Sciences and Philosophy, 9(1): 7–24. doi:10.1017/S0957423900002587
● —–, 2006 [2017], Ibn Al-Haytham: Astronomie, Géométrie sphérique et trigonométrie, V Vol. en Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, Londres: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation. Traducido como Ibn Al-Haytham's Geometrical Methods and the Philosophy of Mathematics, V Vol. en A History of Arabic Sciences and Mathematics, J. V. Field (trad.), Nueva York: Routledge. doi:10.4324/9781315168456
● —–, 2008, "The Philosophy of Mathematics", con Rahman, Street y Tahiri 2008: 153–182. doi:10.1007/978-1-4020-8405-8_6
● —–, 2015, Classical Mathematics from Al-Khwarīzmī to Descartes, Michael H. Shank (trad.), Nueva York: Routledge. doi:10.4324/9781315753867
● —–, 2016, "Avicenne, « philosophe analytique » des mathématiques", Les Études philosophiques, 2016/2(117): 283–306. doi:10.3917/leph.162.0283
● —–, 2018, "Avicenna: Mathematics and Philosophy", in The Philosophers and Mathematics, Hassan Tahiri (ed.), (Logic, Epistemology, and the Unity of Science 43), Cham: Springer International Publishing, 249–262. doi:10.1007/978-3-319-93733-5_11
● —–, 2019, "Ibn al-Haytham, Ibn Sīnā, al-Ṭūsī: Égalité ou congruence", Arabic Sciences and Philosophy, 29(2): 157–170. doi:10.1017/S0957423919000018
● Rashed, Roshdi and Hélène Bellosta, 2000, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle, Leiden: Brill.

● Rescher, Nicholas and Haig Khatchadourian, 1965, "Al-Kindi's Epistle on the Finitude of the Universe", Isis, 56(4): 426–433. doi:10.1086/350044

● Sabra, Abdelhamid Ibrahim, 1989, The Optics of Ibn al-Haytham, Londres: The Warburg Institute.

● ––, 1997, "Thābit Ibn Qurra on the Infinite and Other Puzzles: Edition and Translation of His Discussions with Ibn Usayyid", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 11: 1–33.

● ––, 1998, "One Ibn al-Haytham or Two? An Exercise in Reading the Bio-Bibliographic Sources", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 12: 1–40.

● ––, 2003, "One Ibn al-Haytham or Two? Conclusion", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 15: 95–108.

● Samian, A.L., 2011, "Reason and Spirit in Al-Biruni's Philosophy of Mathematics", in Reason, Spirit and the Sacral in the New Enlightenment, Anna-Teresa Tymieniecka (ed.), Dordrecht: Springer Netherlands, 137–146. doi:10.1007/978-90-481-9612-8_9

● ––, 2014, "The Question of Divinity in Newton's and al-Biruni's Philosophies of Mathematics: A Comparative Perspective", in Islamic Philosophy and Occidental Phenomenology in Dialogue, Anna-Teresa Tymieniecka, Nazif Muhtaroglu y Detlev Quintern (ed.), Dordrecht: Springer Netherlands, 113–123. doi:10.1007/978-94-007-7902-0_9

● Setia, ʿAdī, 2006, "Atomism versus Hylomorphism in the Kalām of al-Fakhr al-Dīn al-Rāzī: A Preliminary Survey of the Maṭālib al-ʿaliyyah", Islam & Science, 4(2): 113–140. [Setia 2006 available online]

● Shamsi, F.A., 1975, "Al-Kindi's Epistle: On What Cannot Be Infinite and of What Infinity May Be Attributed", Islamic Studies, 14(2): 123–144.

● Spiker, Hasan, 2021, Things as They Are: Nafs Al-Amr & the Metaphysical Foundations of Objective Truth, Abu Dabi: Tabah Research.

● Tahiri, Hassan, 2016, Mathematics and the Mind: An Introduction into Ibn Sīnā's Theory of Knowledge, (SpringerBriefs in Philosophy), Cham: Springer International Publishing. doi:10.1007/978-3-319-25238-4

● ––, 2018, "The Foundations of Arithmetic in Ibn Sīnā", in The Philosophers and Mathematics, Hassan Tahiri (ed.), Cham: Springer, 297–314. doi:10.1007/978-3-319-93733-5_13

● Walbridge, John, 2000, The Leaven of the Ancients: Suhrawardī and the Heritages of the Greeks, Albany, NY: State University of New York Press.

● Wisnovsky, Robert (ed.), 2001, Aspects of Avicenna, Princeton, NJ: Markus Wiener.

● Zarepour, Mohammad Saleh, 2016, "Avicenna on the Nature of Mathematical Objects", Dialogue: Canadian Philosophical Review, 55(3): 511–536. doi:10.1017/S0012217316000524

● ––, 2019, "Avicenna against Mathematical Platonism", Oriens, 47(3–4): 197–243. doi:10.1163/18778372-04700100

● ––, 2020a, "Avicenna's Notion of Fiṭrīyāt: A Comment on Dimitri Gutas' Interpretation", Philosophy East and West, 70(3): 819–833. doi:10.1353/pew.2020.0038

● ––, 2020b, "Avicenna on Mathematical Infinity", Archiv Für Geschichte Der Philosophie, 102(3): 379–425. doi:10.1515/agph-2017-0032

● ––, 2020c, "Non-Innate A Priori Knowledge in Avicenna", Philosophy East and West, 70(3): 841–848. doi:10.1353/pew.2020.0040

● ––, 2021, "Avicenna on Grasping Mathematical Concepts", Arabic Sciences and Philosophy, 31(1): 95–126. doi:10.1017/S0957423920000090

● Zhmud', Leonid Ja., 1989, "'All Is Number'? 'Basic Doctrine' of Pythagoreanism Reconsidered", Phronesis, 34(1–3): 270–292. doi:10.1163/156852889X00189

● Ziai, Hossein, 1990, Knowledge and Illumination: A Study of Suhrawardī's Ḥikmat al-Ishrāq, Atlanta, GA: Scholars Press.